Полное исследование функции и построение графика

$$y=\frac{x^4}{x^3-1}$$

1. *Область определения*

$x^3-1\neq 0;\quad x\neq 1$, поэтому $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

2. *Пересечение с осями координат*: точка $(0;0)$.

3. Ввиду того, что область определения несимметрична относительно начала координат, проверка на четность невозможна.

4. *Интервалы знакопостоянства*

Так как $x^4\geq 0\ \forall x\in R$, то знак дроби $\frac{x^4}{x^3-1}$ будет зависеть только от знака знаменателя, т.е. от знака $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Поэтому при $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ $y<0$, а при $x\in(1;+\infty)$ $y>0$.

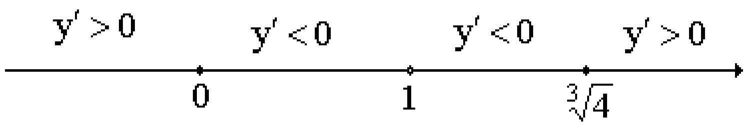
5. *Интервалы монотонности*

$$y'=\frac{4x^3(x^3-1)-x^4\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2}=\frac{4x^6-4x^3-3x^6}{(x^3-1)^2}=\frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2};$$

$x^6-4x^3=0;$

$x^3(x^3-4)=0;$

$x_1=0;\quad x_2=\sqrt[3]{4}$



При $x\in(-\infty;0)\cup(\sqrt[3]{4};+\infty)$ функция возрастает,

При $x\in(0;1)\cup(1;\sqrt[3]{4})$ функция убывает.

$(0;0)$ - точка максимума, $\left(\sqrt[3]{4};\ \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ - точка минимума.

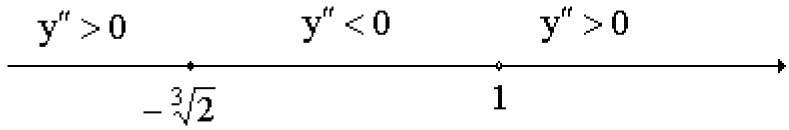
6. *Интервалы выпуклости и вогнутости*:

$$y''=\frac{(6x^5-12x^2)(x^3-1)^2-6x^2(x^6-4x^3)(x^3-1)}{(x^3-1)^4}=$$

$$=6x^2\cdot\frac{(x^3-2)(x^3-1)-(x^6-4x^3)}{(x^3-1)^3}=6x^2\cdot\frac{x^6-x^3-2x^3+2-x^6+4x^3}{(x^3-1)^3}=$$

$$=6x^2\cdot\frac{x^3+2}{(x^3-1)^3};$$

$x^3+2=0;\quad x=-\sqrt[3]{2}$



$x \in \left(-\infty; -\sqrt[3]{2}\right) \cup (1; +\infty)$ график функции вогнутый,
$x \in \left(-\sqrt[3]{2};\ 1\right)$ график функции выпуклый.
$\left(-\sqrt[3]{2};\ -\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ - точка перегиба.

7. *Асимптоты*

Так как $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4}{x^3 - 1} = \infty$, то $x = 1$ - вертикальная асимптота.
Уравнение наклонной асимптоты будет искать в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x\left(x^3 - 1\right)} = 1;\ \ b = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0.$$

Следовательно, $y = x$ - наклонная асимптота.